

Metodologías computacionales de restitución geométrica de cuerpos geológicos para evaluación de yacimientos

Alvaro Egaña*, Julián M. Ortiz

Laboratorio ALGES, Advanced Mining Technology Center (AMTC), Universidad de Chile, Av. Tupper 2069, Santiago, Chile
Departamento de Ingeniería de Minas, Universidad de Chile, Av. Tupper 2069, Santiago, Chile

* email: aegana@ing.uchile.cl

Resumen. La estimación de recursos requiere inferir la continuidad espacial de las variables de interés, tales como leyes de elementos de valor económico y de contaminantes. Esta continuidad está controlada por las características de la roca al momento de la depositación de los elementos de interés, generándose direcciones preferentes de flujos mineralizadores y en consecuencia, anisotropías en la continuidad espacial de las concentraciones de éstos. Los cuerpos mineralizados son, a menudo, sometidos a otros procesos geológicos que afectan su forma y alteran la continuidad espacial. En particular, se producen plegamientos, fallas, compactaciones y erosión. En este artículo, presentamos una revisión de dos métodos computacionales para restituir volúmenes geológicos a su geometría original, considerando las alteraciones producto de fallas y plegamiento. Destacamos los problemas encontrados y las soluciones propuestas para el desarrollo de herramientas computacionales que faciliten la inferencia de la continuidad espacial y el modelamiento posterior de los recursos.

Palabras Claves: aplanamiento de superficies, evaluación de yacimientos, estimación de recursos

1 Introducción

En el proceso de evaluación de yacimientos, el valor de las variables de interés, tal como la ley de elementos de valor económico o de contaminantes, es un dato desconocido en el dominio de estudio. Mediante la obtención de muestras en sondajes y otras muestras geológicas se obtienen valores de esas variables en ciertos puntos - generalmente muy pocos - para, en función de ellos, estimar su valor en el dominio completo. La técnica de estimación geoestadística más usada hoy en día es conocida como *kriging* o *krigeado*, que es un estimador de la familia de los interpoladores lineales. Si, por ejemplo, se quiere estimar el valor $Z_0 = Z(x_0)$, su forma general es [1]:

$$Z_0^* = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} Z_{\alpha} + \lambda_0$$

Donde Z_0^* es el valor estimado y Z_{α} son los valores experimentales recogidos a través del proceso de muestreo. Esto hace que el problema se reduzca a determinar los coeficientes λ_{α} y λ_0 . En general, son calculados de tal manera de minimizar la varianza del error, dada por $E(Z^* - Z_0)^2$, resolviendo un sistema lineal de la forma

$$\begin{pmatrix} C(Z_1 - Z_1) & \cdots & C(Z_1 - Z_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(Z_N - Z_1) & \cdots & C(Z_N - Z_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(Z_0 - Z_1) \\ \vdots \\ C(Z_0 - Z_N) \end{pmatrix}$$

Donde N es el número de muestras. La función $C(\vec{h})$ es conocida como función de covarianza y caracteriza la continuidad espacial de las variables de interés, entre puntos del dominio, separados por un vector \vec{h} .

Evidentemente, la función de covarianza no puede distinguir la causa de la correlación que está capturando. Es decir, en caso de que la variable de interés sea la ley de algún mineral, por ejemplo, no es posible determinar si la correlación sobre un cierto vector \vec{h} se debe al proceso de mineralización en sí mismo o si fue causada por algún evento geológico posterior (una falla o un plegamiento). Por tanto, en caso de estar en presencia de dichos eventos geológicos, el no tomar en cuenta este aspecto puede llevar a errores de interpretación - asumiendo, por ejemplo, la existencia de direcciones preferenciales de mineralización donde no las hay - y por consiguiente, a errores de estimación, afectando finalmente el proceso de evaluación en su conjunto. En este artículo mostramos alternativas para corregir este problema mediante la restitución geométrica de los modelos numéricos de los cuerpos de interés llevándolos a una geometría que se aproxime de mejor manera a la situación previa al evento geológico. En nuestra implementación, se consideran sólo fallas y plegamientos, despreciándose en esta etapa, el efecto de compactaciones y erosiones. Sin embargo, en lo que sigue del artículo, nos enfocaremos solamente en la problemática de los plegamientos.

2 Metodología

Como se mencionó, dada la complejidad del problema, en este estudio sólo nos enfocamos en la restitución de plegamientos. El objetivo no es reconstituir la historia geológica - considerando, por ejemplo, la interacción con fallas y la dinámica/cinemática asociada - sino generar una geometría que permita una mejor inferencia de la continuidad espacial. Para ello se asume que la situación previa del volumen representado por el modelo es aquella donde no existen pliegues.

2.1 Volumen modelado y ausencia de pliegues

Para definir lo que se entiende por ausencia de pliegues se toma como referencia una superficie relevante del volumen. Dado esto, decimos que un volumen no tiene pliegues si su superficie es plana – formalmente esto se traduce a imponer que dicha superficie tenga radio de curvatura infinito [3].

2.2 Datos de entrada

Se considera que el dominio está discretizado en un modelo de bloques.

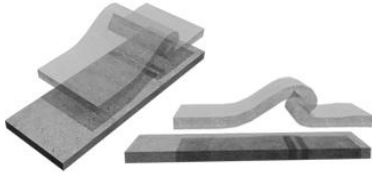


Figura 1. Efecto producido por el aplanamiento usando MDS.

2.3 Algoritmo propuesto

1. **Superficie de referencia:** se identifican los bloques que pertenecen a la superficie relevante del volumen (o superficie de referencia).
2. **Anclaje:** todos los bloques restantes del volumen son anclados al bloque más cercano en la superficie.
3. **Aplanamiento de la superficie de referencia:** para cada bloque de ésta se calculan sus nuevas coordenadas en la superficie aplanada (ver sección 3).
4. **Proyección:** Para cada uno de los bloques restantes, se calculan sus nuevas coordenadas de acuerdo a la proyección con respecto a la referencia obtenida en el paso 2.

3 Métodos de aplanamiento de superficies

El aplanamiento de una superficie es un problema común en computación gráfica – principalmente en imagenología médica 3D y mapeo de texturas en superficies 3D. Se sabe que es *NP-hard* [4], lo que significa que está en una categoría de problemas que son conocidos por no poder ser resueltos de manera óptima mediante procedimientos algorítmicos – ya sean manuales, automáticos, supervisados o no supervisados. Esto restringe el espacio de soluciones a aproximaciones puramente heurísticas, es decir, que sólo pueden obtener óptimos locales. En otras palabras, esto significa que la superficie obtenida es una aproximación a la superficie real y que necesariamente no está exenta de deformaciones planares.

En este trabajo se proponen dos métodos de aplanamiento para una superficie discretizada:

1. Usando Escalamiento Multidimensional (Multi Dimensional Scaling o MDS, en inglés).

2. Usando Análisis de Componentes Principales (Principal Component Analysis o PCA, en inglés).

3.1 MDS

En líneas generales, el escalamiento multidimensional se utiliza para proyectar objetos de espacios de cierta dimensión en algún espacio de dimensión menor. En este caso, proyectamos vectores en 3D a un plano, es decir, a 2D. El único requisito para el espacio de origen es que posea una métrica. En nuestro método, se considera la métrica definida por la distancia geodésica de los bloques en la superficie – que se define como la menor longitud de las curvas que unen dos bloques de la misma. Para calcular esta distancia en un espacio discretizado, Grossman [5] propuso el siguiente método:

1. Construir un grafo no dirigido - con peso - con los bloques de la superficie en los nodos.
2. Agregar una arista entre nodos que correspondan a bloques adyacentes calculando su peso de acuerdo al tipo de adyacencia (figura 2) de la siguiente manera:
 - a. Si los bloques están unidos por una cara se le asigna el peso de valor 1.
 - b. Si los bloques están unidos por una arista se le asigna el peso de valor $\sqrt{2}$.
 - c. Si los bloques están unidos por un vértice se le asigna el peso de valor $\sqrt{3}$.

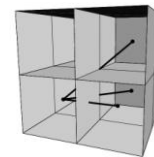


Figura 2. Tipos de adyacencias entre bloques.

Luego, dados dos bloques i y j , la distancia geodésica entre ellos queda estimada por

$$d_{i,j}^* = N_1 * 1 + N_2 * \sqrt{2} + N_3 * \sqrt{3}$$

Donde N_1, N_2 y N_3 son la cantidad de aristas del grafo recorridas por cada tipo, respectivamente – usando el algoritmo de Dijkstra – para llegar de un nodo a otro. Una vez calculadas estas distancias, el algoritmo es el siguiente:

1. Calcular la matriz de distancias cuadráticas $D^* = [(d_{i,j}^*)^2]$ de $N \times N$ (recordar que N es el número de muestras - bloques o nodos del grafo).
2. Calcular la matriz de coeficientes $B = -\frac{1}{2}JD^*J$.
Donde $J = I - \frac{1}{N}\mathbb{1} \times \mathbb{1}^T$ y $\mathbb{1}$ es una matriz cuyos términos son todos iguales a 1.
3. Calcular la descomposición espectral hasta el rango 2 de $B = Q_2\Lambda_2Q_2^T$. Q_2 es una matriz de $N \times 2$ que

contiene los 2 vectores propios dominantes en sus columnas y Λ_2 es una matriz diagonal de 2×2 que contiene los valores propios asociados.

- Finalmente se calcula $X = Q_2 \Lambda_2^{1/2}$ que es una matriz de $N \times 2$ que en sus filas contiene las nuevas coordenadas de los bloques en el plano proyectado.

Este método tiene la gran ventaja de preservar la distancia geodésica entre los bloques y minimiza el error: $\|XX^T - B\|_F^2$ donde $\|\cdot\|_F^2$ es la norma de Frobenius. Su efecto es el mismo que se obtiene al planchar una superficie arrugada - figura 1.

3.2 PCA

Desde el punto de vista geométrico, el método anterior tiene el comportamiento deseado. Sin embargo, es computacionalmente muy costoso para un N muy grande. Como alternativa nos enfocamos en el método que proyecta ortogonalmente todos los bloques sobre un plano previamente definido. La dificultad estriba entonces en estimar el mejor plano de proyección.

De antemano se sabe que la proyección ortogonal no preserva el área de la superficie original en la proyectada. El objetivo es entonces minimizar el error:

$$\left| A_p - \iint_S d\vec{s} \right|$$

Donde A_p es el área de la superficie proyectada y S es la superficie original. Esto puede ser logrado tomando las coordenadas de los bloques en el espacio para encontrar las dos direcciones de mayor varianza asumiendo que la tercera dirección (recordando que se trabaja en 3D) es significativamente menor - lo que en otras palabras significa imponer que el radio de curvatura promedio sea muy grande - utilizando PCA. El método de las covarianzas exige calcular la matriz de covarianzas entre las direcciones de la base ortonormal. Los dos vectores propios dominantes de esta matriz corresponden a las direcciones de mayor varianza - figura 3.

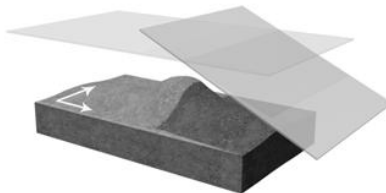


Figura 3. Las direcciones principales obtenidas usando PCA definen el plano óptimo de proyección.

Una vez obtenidas estas direcciones, se calcula el plano definido por ellas y se proyectan todos los bloques sobre él.

A pesar de que este método tiene pérdidas desde el punto

de vista geométrico, es extremadamente rápido ya que la matriz de covarianzas es de tamaño fijo (3×3), sin importar el número de datos - lo que hace que calcular los vectores propios sea extremadamente barato.

4 Conclusiones

Se trabajó en el problema de restituir geoméricamente un volumen alterado por un plegamiento. Se propuso un algoritmo basado en el aplanamiento de una superficie de referencia. Para esto último se propusieron dos métodos alternativos:

- Usando MDS: resultó ser geoméricamente consistente al preservar de mejor manera las relaciones topológicas de la superficie, pero computacionalmente caro para modelos con demasiados bloques.
- Usando PCA: es extremadamente rápido, pero sacrifica un poco la consistencia geométrica. Esto no es particularmente relevante para plegamientos poco pronunciados.

Finalmente, se generó un algoritmo que puede ser integrado fácilmente a un software computacional de evaluación de recursos para mejorar el problema de inferencia en presencia de plegamientos.

Referencias

- Chilés JP, Delfiner P. Geostatistics : modeling spatial uncertainty. New York: Wiley, 1999.
- Gondran, Michel. Graphs and algorithms. Chichester West Sussex New York: Wiley, 1984.
- Do Carmo, M. Differential geometry of curves and surfaces. Upper Saddle River, N.J.: Prentice-Hall, 1976.
- Danny Z. Chen and Ewa Misonek. 2008. Optimal Surface Flattening. In Proceedings of the 2nd annual international workshop on Frontiers in Algorithmics (FAW '08), Franco P. Preparata, Xiaodong Wu, and Jianping Yin (Eds.). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 233-244.
- Ruth Grossmann, Nahum Kiryati, and Ron Kimmel. 2001. Computational Surface Flattening: A Voxel-Based Approach. In proceedings of the 4th International Workshop on Visual Form (IWVF-4), Carlo Arcelli, Luigi P. Cordella, and Gabriella Sanniti di Baja (Eds.). Springer-Verlag, London, UK, 196-204.
- Marsland, Stephen. Machine learning : an algorithmic perspective. Boca Raton: CRC Press, 2009.